不変消散作用素のある例(Operator Algebras and Applications)

中里, 博

数理解析研究所講究録
560巻 1985年 48-57

不変消散作用素のある例

九大理　中里　博（Hiroshi Nakazato）

1. 問題と結果

定義1.1 Ω：局所コンパクト・ハウスドルフ空間

$C_0(\Omega)$：Ω上の複素数値連続関数で無限遠点で0となるもの全体から成るバナッハ空間．ただし、ノルムとしては最大絶対値ノルムを取る．$T: \mathcal{D}(T)\ (\subset C_0(\Omega)) \to C_0(\Omega)$、$C_0(\Omega)$の稠密な部分空間$\mathcal{D}(T)$で定義された線形作用素．このとき、条件“$f \in \mathcal{D}(T)$、$f(\omega_0) = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$ ならば、$\mathrm{Re}\,Tf(\omega_0) \leqq 0$”が成り立つとき、$T$を消散（dissipative）作用素という．

定義1.2. G：局所コンパクト群．このときGの$C_0(G)$における作用　L（左移動）およびR（右移動）を

$$L_x(f)(y) = f(x^{-1}y),\quad R_x(f)(y) = f(yx)$$

$f \in C_0(G)$, $x, y \in G$　にて定義する．$C_0(G)$における線形作用素Tが、作用Lと可換，即ち　$L_x(\mathcal{D}(T)) = \mathcal{D}(T)$　かつ $TL_x(f) = L_xT(f)$，（$f \in \mathcal{D}(T)$, $x \in G$）のとき、Tは左不

変であるという.

問題1.3.（Faraut. & Harzallah [3], p149-50. '72年）

Gを局所コンパクト群とし、Tを$C_0(G)$における左不変消散作用素とするとき、Tの閉包$\bar{T}$は、$C_0(G)$における縮小作用素の強連続一径数半群の生成作用素であるか？

既知の諸結果1.4. コンパクト群および局所コンパクト可換群に対しては、上記の問題の答は、肯定的である.（Faraut '70. [2] Hirsch [5] '71/72）. また、'76年にはJ.P. Rothが次のような結論を得ている. "Tを$C_0(G)$における左不変消散作用素とするとき、Tの拡大たる左不変閉消散作用素T_0で、半群を生成するものが存在する."（[7]. Th. II. 3.3.）

Rothの上記の結果により、Faraut および Harzallahの問題は、Tの閉包$\bar{T}$とその拡大たるT_0が一致するか、否かという疑問に帰着する.

得られた結論1.5. 1°) Faraut と Harzallahの問題の答は、「否」である. 即ち、3次元ハイゼンベルグ群において、半群を生成しない左不変な閉消散作用素が存在する（例については後に詳述）. このほか、若干の補足的結論として、2°) 局所コンパクト群Gが、開部分群G_0をもち、G_0がコンパクト群G_1と局所コンパクト可換群G_2との直積であるならば、$C_0(G)$における任意の左不変閉消散作用素は、半群を生成する.

3°)［Rothの扱っている拡大に関して］Gがリー群であって、Tが$C_0(G)$における、複素共役操作を保存する左不変消散作用素ならば、Tは、$C_0(G)$における、複素共役操作を保存し、半群を生成する左不変閉消散作用素T_0に一意的に拡大される.

以下、結論1°)に限って、詳述することにする.

2. 左不変消散作用素の不足空間

1.5、1°)で述べた例を構成するための準備を行なう.

G：局所コンパクト群. μ_G：G上の右不変ハール測度.

$(\mu_t)_{t\geqq 0}$：G上の複素有界ラドン測度から成る一径数半群. 即ち、$\mu_{t+s}=\mu_t * \mu_s$, $t, s\geqq 0$, $\mu_0=\varepsilon_e$（Gの単位元eに集中する重み1の原子測度）. さらに次のことを仮定する： i) $\|\mu_t\|\leqq 1$, $t\geqq 0$ ii) $\int_G f(x)\,d\mu_t(x)\to f(e)$（$t\to 0$のとき） ただし, fはG上の複素数値連続関数でコンパクトな台をもつ任意のもの.

上記の測度の半群$(\mu_t)_{t\geqq 0}$を用いて、$C_0(G)$および$L^1(G,\mu_G)$における縮小半群$(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, $(\alpha_t^*)_{t\geqq 0}$を次のように定義する.

$$\alpha_t(f)(x)=\int_G f(xy)\,d\mu_t(y) \quad , \quad f\in C_0(G),\ x\in G$$

$$\alpha_t^*(h)(x)=\int_G h(xy^{-1})\,d\mu_t(y), \quad h\in L^1(G,\mu_G),\ x\in G.$$

このとき、$(\alpha_t^*)_{t\geq 0}$ は、次のような意味で $(\alpha_t)_{t\geq 0}$ の双対半群となっている：$\int_G \alpha_t(f)(x)\ h(x)\ d\mu_G(x) = \int_G f(x)\ \alpha_t^*(h)(x)\ d\mu_G(x)$,

$f\in C_0(G)$, $h\in L^1(G,\mu_G)$, $t\geq 0$.

また、$(\alpha_t)_{t\geq 0}$ は、$C_0(G)$ における左不変縮小作用素から成る強連続一径数半群であり、逆に $C_0(G)$ における任意の，左不変 強連続縮小半群は、測度の半群 $(\mu_t)_{t\geq 0}$ を用いて、上記のように表すことができる．

さて、上記の仮定の下、次のことが成り立つ．

補題 2.1. ［この補題は、ヒルベルト空間における自己共役作用素の制限を扱っている、Jørgensen, Muhly ［6］. lemma 10 の一つの変形である］

J をバナッハ環 $L^1(G,\mu_G)$ の $\sigma(L^1(G), C_0(G))$ - 位相に関して閉じた左イデアルであって、条件 "$J\cap\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$" を満たすものと仮定する．ただし，$T^* = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\alpha_t^* - I\}$.

このとき、$T = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\alpha_t - I\}$ の制限 T_1 を，その定義域 $\mathcal{D}(T_1)$ を、$\mathcal{D}(T_1) = \{f\in\mathcal{D}(T) : ((I-T)(f), h) = 0\ ,\ h\in J\}$ と指定することにより、定めるとき、T_1 も $C_0(G)$ の稠密な部分空間で定義された左不変閉消散作用素となる．

ここで、$J \neq (0)$ ならば、$T_1 \subsetneqq T$ となる．

（証明略）［［6］, lemma 10 と同様に証明される］

さて、この補題により 1.5 p) で述べた反例が存在すること

を言うには、$J \cap \mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ なる $\sigma(L^1(G), C_0(G))$- 閉の 0 でない左イデアル J を構成すればよい。

3. 例の構成

G を 3 次元ハイゼンベルク群、即ち

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

とする。G の両側不変ハール測度 μ_G が、$\mu_G\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = dx\,dy\,dz$ で与えられる。$C_0(G)$ における左不変等長作用素の強連続一径数群 $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を、$\alpha_t(f)\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$f \in C_0(G)$, $t \in \mathbb{R}$ で定める。これを 2 節で述べた形で記述しようとすれば、対応する測度の群 $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は、

$\mu_t = \varepsilon_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ [点 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ における重み 1 の原子測度] で与えられる。このとき、$T^* = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)}^{L^1(G)}$

[G 上無限回微分可能でコンパクトな台をもつ関数の全体 $C_c^\infty(G)$ で定義された左不変ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ の $L^1(G)$ のノルムに関する閉包] に対して、上記で述べたような左イデアルを構成する。

さて、ここで $T = s\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\alpha_t - I\}$ が複素共役操作と可換であることに注意して T の制限 T_1 も複素共役操作と可換であるように構成しよう。そのためには、左イデアル J を、J が

複素共役操作で不変であるように、構成すればよい．左イデアル J を直接的に構成し、それが必要な諸性質を満たすことを検証するのは、困難であると思われるので、プランシュレル変換を用いて、J を構成する．

$L^2(G, \mu_G)$ から $L^2(\mathbb{R}^3, |u|\,du\,dt\,ds)$ の上への定数因子をともなった等長作用素 P を

$$P(f)(u,t,s) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i[uz+ty]\right) f\left(\begin{pmatrix} 1 & s-t & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dy\,dz$$

$$f \in L^1(G, \mu_G) \cap L^2(G, \mu_G)$$

により定義する．プランシュレル変換 P は、次の公式

$$P(f * k)(u,t,s) = \int_{\mathbb{R}} P(f)(u,t,v)\, P(k)(u,v,s)\, dv$$

$$f,\ k \in L^1(G, \mu_G) \cap L^2(G, \mu_G)$$

を満たす．さて、左イデアル J を

$$J = \overline{\left\{ \varphi * P^{-1}(f_0) \ :\ \varphi \in L^1(G) \right\}}^{\,\sigma(L^1(G),\, C_0(G))}$$

で定める．ここで $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^3, |u|\,du\,dt\,ds) \cap L^2(\mathbb{R}^3, |u|\,du\,dt\,ds)$ は次のように与えられる．

$$f_0(u,t,s) = f_1(u)\, f_2(ut)\, f_3(s)$$

ただし、① $f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，$f_1$ は実数値関数で，

$f_1(u) = f_1(-u)$，$\mathrm{Supp}(f_1) \subseteq \{ u \in \mathbb{R} : \varepsilon \leqq |u| \leqq M \}$

$(0 < \varepsilon < M < \infty$，$\varepsilon, M$ は定数$)$，$f_1 \neq 0$．

② $f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$、$f_2$は実数値関数で $f_2(x)=f_2(-x)$、$f_2 \neq 0$.
③ f_3は、$\mathbb{R}$上の無限回連続微分可能な実数値関数で、f_3およびf_3の4階までの導関数、$f_3, f_3', f_3'', f_3''', f_3''''$がすべて、$L^1(\mathbb{R}, dx)$（ルベーグ測度$dx$に関する$\mathbb{R}$上の$L^1$-空間）に属し、関数 $x\ (\in \mathbb{R}) \longrightarrow x f_3(x)\ (\in \mathbb{R})$が、$L^2(\mathbb{R}, dx)$に属さないような関数.

と仮定する.

上記の仮定①,②,③の下、$P^{-1}(f_0)$は、G上の実数値関数で、$L^1(G, \mu_G) \cap L^2(G, \mu_G)$に属する. ここで、$P^{-1}(f_0)$が、$L^2(G)$だけでなく、$L^1(G)$にも属することの検証は、$P^{-1}(f_0)$の$L^1$-ノルムの直接的評価により行なうことができる.

さて、ここで $J \cap \mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ となることの証明の素描を行なおう. $L^2(G)$における歪自己共役作用素$\frac{\partial}{\partial y}+t\frac{\partial}{\partial z}$はプランシュレル変換により、$L^2(\mathbb{R}^3, |u|\,du\,dt\,ds)$における

$$h \longrightarrow \tilde{h} \qquad ただし\quad \tilde{h}(u,t,s) = i\,u\,s\ h(u,t,s)$$

なる掛算作用素に変換される. ここで、$h_0 \in L^2(\mathbb{R}^3, |u|\,du\,dt\,ds)$で$h_0(u,t,s)=0$が$|u| \leqq \varepsilon$または$|u| \geqq M$に対して成り立つような関数$h_0$が、上の歪自己共役作用素$h \longrightarrow \tilde{h}$の定義域に属するためには、$|s|$の増大に対し、$|h_0(u,t,s)|$は、すみやかに減少しなければならない.（$0<\varepsilon<M<\infty$、$\varepsilon$および$M$は定数）ところが、既に定義した$f_0$はこの性質

を持たず、さらに、$L^1(G) \cap L^2(G)$ において $P^{-1}(f_0)$ に左から軟化作用素 $\varphi \in C_c^\infty(G)$ をたたみ込みの意味で作用させる操作 $P^{-1}(f_0) \longrightarrow \varphi * P^{-1}(f_0)$ に対応する $L^1(\mathbb{R}^3, |u|du\,dt\,ds) \cap L^2(\mathbb{R}^3, |u|du\,dt\,ds)$ における操作

$$f_0 \longmapsto A_\xi(f_0) \quad \left[\text{ただし}\ A_\xi(f_0)(u,t,s) = \int_{\mathbb{R}} \xi(u,t,v) f_0(u,v,s)\,dv\right.$$
$$\left.\xi \in L^1(\mathbb{R}^3, |u|du\,dt\,ds) \cap L^2(\mathbb{R}^3, |u|du\,dt\,ds)\right]$$

によっては、$|s|$ の増大に対応する関数 $|A_\xi(f_0)|$ の減少の度合いは速まらない．これが、$J \cap \mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ となることの、大まかな理由である．実際 $J \cap \mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ となることが、背理法により確認される．

1.5 1°) で述べた例は、次のように詳述される．

命題 3.1. G を 3 次元ハイゼンベルク群とする．T を、$C_0(G)$ における左不変閉 $*$-微分 $T = -\overline{\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial z}\right)}^{\,C_0(G)}$ と仮定する．このとき、T の制限 T_1 で、

T_1　$C_0(G)$ の稠密な部分空間で定義された左不変閉 $*$-消散作用素，$T_1 \subsetneqq T$

なるものが存在する．T_1 は $C_0(G)$ における強連続一径数縮小半群を生成しない．

4. 若干の補注．

注1：命題3.1 および Goodman の定理（[4] Th.B.）より、次のことがわかる．"$C_0(G)$ の左不変閉 $*$-消散作用素 T で、その定義域 $\mathcal{D}(T)$ が、「T の核（core）となっているような $C_0(G)$ の左不変 $*$-部分環 $\mathcal{D}$」を一つも含まないようなものが存在する．

このことは次のことに関係する．まず、次のことが知られている．「Ω をコンパクト・ハウスドルフ空間とし、T を $C(\Omega)$ における $*$-消散作用素で $T(1)=0$ なるものとするとき、$f\in\mathcal{D}(T)$ かつ $f\cdot\bar{f}\in\mathcal{D}(T)$ ならば、不等式

$$T(f\cdot\bar{f})\geqq T(f)\cdot\bar{f}+f\,\overline{T(f)}$$ が成り立つ」

（c.f. Evans. Hanche-Olsen [1]）．もし、次のことが成り立つから、この不等式は、消散作用素を特徴づけるものとなろう．"$C(\Omega)$ における $T(1)=0$ なる $*$-閉消散作用素 T は、その核として $C(\Omega)$ の $*$-部分環 $\mathcal{D}$ を含む？"

上記の事実は、この性質の成否に答えるものでは決してないが、この性質の成立の見通しを悲感的にしているように思われる．

注2．$C_0(G)$ における左不変閉消散作用素が半群を生成するための様々な十分条件が知られている．（J.P. Roth [7] 参照）．例えば、G がリー群のとき、左不変閉消散作用素 T の定義域 $\mathcal{D}(T)$ が、$C_c^\infty(G)$ を含むということがその一

つである．このことは、命題3.1で述べた左不変閉消散作用素T_1に対しては、$\mathcal{D}(T_1) \not\supseteq C_c^\infty(G)$となっていることを物語っている．3節で構成した作用素T_1の定義域は、この意味で病理的であると言えよう．

References

(1)D.E.Evans,H.Hanche-Olsen: The generators of positive semi-groups, J.Func.Anal. 32,2o7-212 (1979)

(2) J.Faraut: Semigroupes des measures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitesimaux des semigroupes doperateurs, Ann.Inst.Fourier 2o, 235-3o1(197o)

(3)J.Faraut,K.Harzallah: Semigroups d'opérateurs invariants et opérateurs dissipstifs invariants, Ann.Inst.Fourier 22, 147-164 (1972)

(4)F.M.Goodman: Translation invariant closed *-derivations, Pacific J.Math. 97, 4o3-413 (1981)

(5)F.Hirsch: Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants par translation sur les groupes localements compactes, Seminaire de theorie du potentiel 15^{e} annee (1971/72)

(6)P.T.Jørgensen,P.S.Muhly: Self adjoint extensions satisfying the Weyl operator commutation relations, J.Analyse Math. 37, 46-99 (198o)

(7)J.P.Roth: Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctins continues, Ann.Inst.Fourier,26,1-97(1976)